CÁLCULO L1 — NOTAS DA SÉTIMA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula, apresentaremos a regra para derivar o resultado da composição de funções, que é conhecida como a regra da cadeia. Abordaremos também a derivação de uma função implícita.

1. A composição de funções

Para duas duas funções f e g, a **função composta** $f \circ g$ é definida, para um valor X, como:

$$(f \circ g)(X) = f(g(X))$$

Esta operação não é comutativa. Em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Vamos analisar um exemplo. Considere $f(X) = \sqrt{X}$ e $g(X) = 1 + 2 \operatorname{sen} X$. Neste caso

$$(f \circ g)(X) = f(g(X)) = \sqrt{g(X)} = \sqrt{1 + 2 \operatorname{sen} X}$$

Qual o maior domínio de definição para esta função composta? Note que $f \circ g$ está definida apenas para aqueles X tais que $1 + 2 \operatorname{sen} X \geq 0$. Isto é, $\operatorname{sen} X \geq -\frac{1}{2}$. Portanto, o maior domínio de definição de $f \circ g$ é

$$\left\{X \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq X \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Note que $f \circ g$ é periódica porque

$$(f \circ g)(X + 2\pi) = \sqrt{1 + 2 \operatorname{sen}(X + 2\pi)} = \sqrt{1 + 2 \operatorname{sen} X} = (f \circ g)(X)$$

Por fim, observe que a imagem de $f \circ g$ é o conjunto $[0, \sqrt{3}]$. Claramente $f \circ g \neq g \circ f$ porque

$$(g \circ f)(X) = 1 + 2 \operatorname{sen} \sqrt{X}$$

tem, por exemplo, como maior domínio de definição o conjunto dos números reais não-negativos.

Exercício 1. *Decida sobre a veracidade de cada uma das sentenças listadas a seguir.*

(i) *Se* $f(X) = X^2 - 5X + 6$ *e* $g(X) = 1 + \cos X$, *então* $f \circ g$ *possui 16 raízes no intervalo* $[0, 100]$

(ii) *Se* $f(X) = 3 \operatorname{cotg} X$ *e* $g(X) = 5X - 4$, *então* $f \circ g$ *é uma função periódica, com período* $\frac{\pi}{5}$

(iii) *Se* $f(X) = X^3 + 5$ *e* $g(X) = 2 + \operatorname{sen} X$, *então a imagem de* $f \circ g$ *é igual ao intervalo* $[1, 2]$

(iv) *Se* $f(X) = \sqrt{X}$ *e* $g(X) = X^6 + 4X^3 + 4$, *então* $(f \circ g)(X) = X^3 + 2$

(v) *Se* $f(X) = \sqrt[4]{X}$ *e* $g(X) = 1 + \operatorname{tg} X$, *então o maior domínio de definição de* $f \circ g$ *é o conjunto* $\left\{X \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq X < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

2. A regra da cadeia

Regra 2. *Se* $r(X) = f(g(X))$, *então*

$$r'(X) = f'(g(X))g'(X)$$

Por definição,

$$r'(X) = \lim_{h \to 0} \frac{r(X+h) - r(X)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(X+h)) - f(g(X))}{h} \tag{1}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da última fração por $g(X+h) - g(X)$, obtemos

$$r'(X) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(g(X+h)) - f(g(X))]}{h} \frac{[g(X+h) - g(X)]}{[g(X+h) - g(X)]} \tag{2}$$

que pode ser reescrita como

$$r'(X) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(g(X+h)) - f(g(X))]}{[g(X+h) - g(X)]} \frac{[g(X+h) - g(X)]}{h}$$

Como o limite do produto é o produto dos limites, chegamos à

$$r'(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(X+h)) - f(g(X))}{g(X+h) - g(X)} \lim_{h \to 0} \frac{g(X+h) - g(X)}{h} \tag{3}$$

Sejam $l = g(X+h) - g(X)$ e $Y = g(X)$. Observe que $l \to 0$ quando $h \to 0$ porque $g'(X)$ existe. Conseqüentemente (3) pode ser reescrita como

$$r'(X) = \lim_{l \to 0} \frac{f(Y+l) - f(Y)}{l} \lim_{h \to 0} \frac{g(X+h) - g(X)}{h}$$

e daí $r'(X) = f'(Y)g'(X) = f'(g(X))g'(X)$.

A passagem de (1) para (2) é delicada. Caso $g(X+h) - g(X) = 0$, isto é, $g(X+h) = g(X)$, ocorre uma divisão por 0. Como $h \to 0$, podemos fazer esta passagem sem problemas desde que exista um intervalo aberto I contendo X tal que $g(X) \neq g(X')$ para todo $X' \in I$, com $X \neq X'$. Quando tal intervalo não existe, é possível construir uma seqüência de números reais diferentes que se aproximam de X para os quais o valor da função g é sempre igual a $g(X)$. Caso isto ocorra, $g'(X) = 0$ e $r'(X) = 0$.

Exemplo 3. *Encontre a derivada das seguintes funções:*

(i) $a(X) = \operatorname{sen}(X^2 + 2X)$
(ii) $b(X) = \sqrt{2 + \operatorname{sen}(X^2 + 2X)}$

Vamos encontrar a derivada de $a(X)$. Observe que $a(X) = f(g(X))$, com $f(X) = \operatorname{sen} X$ e $g(X) = X^2 + 2X$. Pela regra da cadeia, temos que $a'(X) = f'(g(X))g'(X)$. Como $f'(X) = \cos X$ e $g'(X) = 2X + 2$, temos que

$$a'(X) = (2X+2)\cos(X^2 + 2X)$$

Agora calcularemos a derivada de $b(X)$ utilizando a derivada de $a(X)$. Isto é, neste caso, necessitamos utilizar a regra da cadeia duas vezes. Temos que $b(X) = f(g(X))$, na qual $f(X) = \sqrt{X}$ e $g(X) = 2 + \operatorname{sen}(X^2 + 2X)$. Pela regra da cadeia, temos que

$b'(X) = f'(g(X))g'(X)$. Sabemos que $f'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ e que $g'(X) = 0 + a'(X) = (2X + 2)\cos(X^2 + 2X)$, pois $g(X) = 2 + a(X)$. Conseqüentemente

$$b'(X) = \frac{(2X+2)\cos(X^2+2X)}{2\sqrt{2+\operatorname{sen}(X^2+2X)}}$$

Exercício 4. *Calcule a derivada de cada uma das funções a seguir:*

(i) $a(X) = \sqrt{X^4 + 2X + 9}$
(ii) $b(X) = \operatorname{tg}(X^5 - 4X^3 + 2X)$
(iii) $c(X) = \cos\left(\frac{X-1}{X+1}\right)$
(iv) $d(X) = (X^3 + X^2 + X - 1)^{27}$
(v) $e(X) = \operatorname{sen}^3(5 + \operatorname{cotg} X)$
(vi) $f(X) = \left(3X + \sqrt{1 + \operatorname{sen}(2X+5)}\right)^{100}$

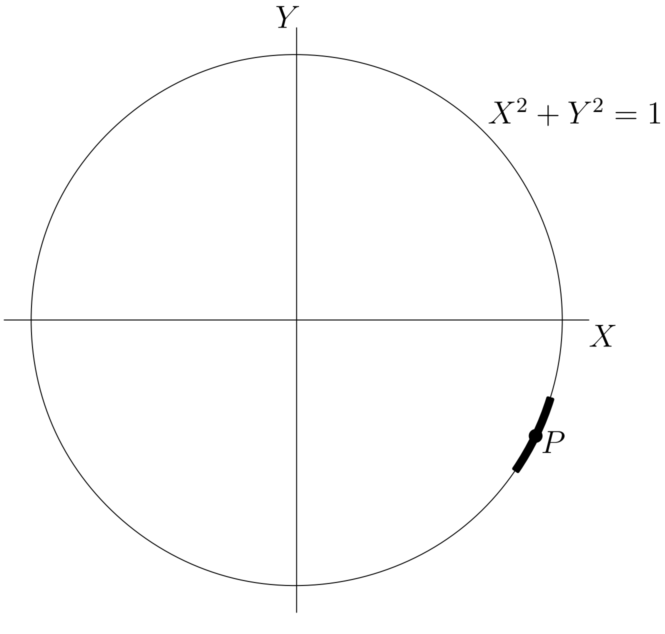
Exercício 5. *Encontre a equação da reta normal à curva de equação* $Y = \sqrt{X^2+9}$ *no ponto de coordenadas* $(0, 3)$

Exercício 6. *Mostre que:*

(i) *A derivada de uma função par é uma função ímpar.*
(ii) *A derivada de uma função ímpar é uma função par.*

3. A derivação de uma função implícita

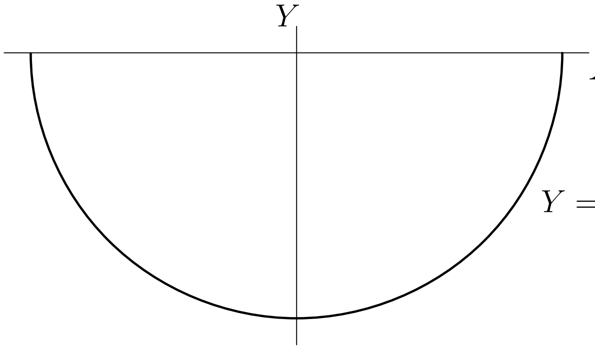
Na figura segunte, representamos uma circunferência de raio 1 e centro na origem. A equação desta circunferência é dada por $X^2 + Y^2 = 1$.



Note que, para todo ponto P nesta circunferência diferente dos de coordenadas $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, existe uma parte desta curva em torno deste ponto que é o gráfico de uma função. Na figura anterior, destacamos um arco da circunferência, em torno do ponto P indicado, que é o gráfico de uma função. Neste caso, podemos explicitar Y como função de X. Esta curva é a união do gráfico de duas funções dados pelas equações

$$Y = \sqrt{1 - X^2} \quad \text{e} \quad Y = -\sqrt{1 - X^2}$$

A seguir apresentamos o gráfico da função $Y = -\sqrt{1-X^2}$. Assumimos, já que nada foi dito ao contrário, que o domínio desta função é o maior possível, isto é, o conjunto de todos os X reias para os quais esta expressão assume valor real.



Em geral pode não ser possível explicitar, em torno do ponto P, o valor de Y como uma função de X. Por exemplo, seja a curva de equação

$$3X^5 - X^2Y^3 + Y^5 - 3X^2Y - 21 = 0 \tag{4}$$

Note que o ponto P de coordenadas $(1, 2)$ está nesta curva. Não sabemos como escrever Y como função de X em torno deste ponto. Contudo, podemos determinar o coeficiente angular da reta tangente a esta curva no ponto P. Fazemos isto assumindo que, em torno do ponto P, a curva é o gráfico de uma função, isto é, que Y é função de X, e depois derivando a equação (4) com relação a variável X. Note que a derivada de Y^5, por exemplo, será $5Y^4Y'$, onde Y' representa a derivada de Y com relação a X, pela regra da cadeia, pois Y é uma função de X. Portanto, ao derivarmos (4) com respeito a X, obtemos que

$$15X^4 - (2XY^3 + 3X^2Y^2Y') + 5Y^4Y' - 3(2XY + X^2Y') = 0$$

Ao substituirmos $X = 1$ e $Y = 2$, que são as coordenadas do ponto P, nesta equação obtemos

$$15 - (16 + 12Y') + 80Y' - 3(4 + Y') = 0$$

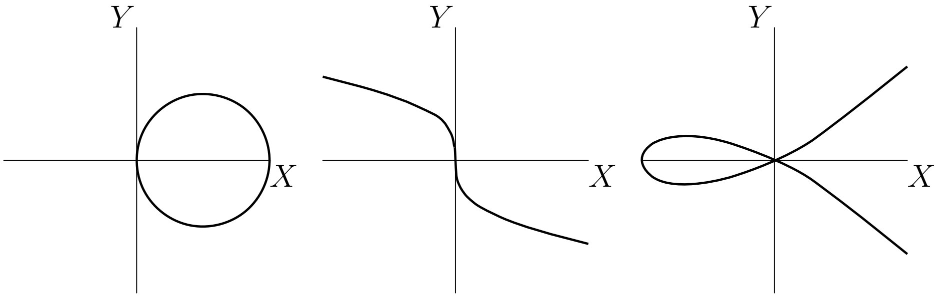
e daí $-13 + 65Y' = 0$. Logo $Y' = \frac{13}{65} = \frac{1}{5}$. A equação da reta tangente a esta curva neste ponto é

$$Y - 2 = \frac{1}{5}(X - 1)$$

Esta abordagem pode não funcionar em alguns casos porque

- A curva pode não ser o gráfico de uma função em torno do ponto. Por exemplo, isto ocorre com a curva $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$ e o ponto de coordenadas $(0, 0)$.
- A reta tangente é vertical. Por exemplo, isto ocorre com a curva $Y^3 + X = 0$ e o ponto de coordenadas $(0, 0)$.
- Não existe reta tangente no ponto. Por exemplo, isto ocorre com a curva $Y^2 - X^2 - X^3 = 0$ e o ponto de coordenadas $(0, 0)$.
- O ponto é isolado. Por exemplo, isto ocorre com a curva $X^2 + Y^2 = 0$ e o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

Quando realizamos o procedimento descrito no parágrafo anterior para a obtenção do coeficiente angular da reta tangente em um ponto P, ao substituirmos as coordenadas de P, chegamos a uma equação do tipo $\alpha Y' + \beta = 0$, onde α e β são nḿeros reais. Caso $\alpha \neq 0$, deternina-se o valor de Y'. Não será possível determinar tal valor apenas quando $\alpha = 0$. Verifique que este será o caso nos exemplos descritos acima. As figuras a seguir ilustram respectivamente as partes das curvas $\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$, $Y^3 + X = 0$ e $Y^2 - X^2 - X^3 = 0$ que estão contidas no quadrado com vértices nos pontos de coordenadas $(-1,-1), (-1,1), (1,1)$ e $(1,-1)$.



Exercício 7. *Ache a equação da reta normal à curva de equação* $X^3 + 5X^2Y - 3XY^2 + 2Y^3 - X^2 - 3Y^2 + X + 5Y = 0$ *no ponto de coordenadas* $(0,0)$.

Exercício 8. *Determine a equação das retas tangentes à curva de equação* $X^4 + Y^4 = 1$ *que são paralelas à reta de equação* $X + Y = 0$.

4. Comentando a derivada de uma função implícita

Seja $f(X,Y)$ uma função de duas variáveis reais. O conjunto de soluções da equação $f(X,Y) = 0$ forma uma curva que pode ser vazia ou conter apenas um único ponto. Por exemplo, quando $f(X,Y) = X^2 + Y^2 - 1$, este conjunto é uma circunferência de raio 1 e centro no ponto de coordenadas $(0,0)$. Considere um ponto P, de coordenadas (x_0, y_0), que está nesta curva. Isto é, $f(x_0,y_0) = 0$. Fixado um valor para Y, podemos ver $f(X,Y)$ como uma função de X apenas. A derivada desta função, que é conhecida como a derivada parcial com relação a variável X, é denotada por $f_X(X,Y)$. De maneira análoga definimos $f_Y(X,Y)$. Existe um teorema, que é estudado em um curso de análise, afirmando o seguinte: *Se $f_X(X,Y)$ e $f_Y(X,Y)$ existem para todos os pontos com coordenadas (X,Y) que estão em algum disco com centro no ponto de coordenadas (x_0,y_0) e $f_Y(x_0,y_0) \neq 0$, então, nas proximidades do ponto de coordenadas (x_0,y_0), a curva de equação $f(X,Y) = 0$ é o gráfico de uma função cuja derivada no ponto x_0 é igual à $-\frac{f_X(x_0,y_0)}{f_Y(x_0,y_0)}$.* Isto é, podemos derivar implicitamente.

5. Respostas dos exercícios

1. (i) V (ii) V (iii) F (a imagem é o intervalo $[6,32]$) (iv) F (é igual à $|X^3+2|$) (v) V **4.** (i) $a'(X) = \frac{2X^3+1}{\sqrt{X^4+2X+9}}$ (ii) $b'(X) = (5X^4 - 12X^2 + 2)\sec^2(X^5 - 4X^3 + 2X)$ (iii) $c'(X) = -\frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{X-1}{X+1}\right)}{(X+1)^2}$ (iv) $d'(X) = 27(X^3 + X^2 + X - 1)^{26}(3X^2 + 2X + 1)$ (v) $e'(X) = -3\,\mathrm{sen}^2(5 + \mathrm{cotg}\, X)\cos(5 + \mathrm{cotg}\, X)\,\mathrm{cossec}^2 X$ (vi) $f'(X) = 100\left(3X + \sqrt{1 + \mathrm{sen}(2X+5)}\right)^{99}\left(3 + \frac{2\cos(2X+5)}{2\sqrt{1+\mathrm{sen}(2X+5)}}\right)$
5. $X = 3$ **7.** $5X - Y = 0$ **8.** $X + Y + \sqrt[4]{8} = 0$ e $X + Y - \sqrt[4]{8} = 0$

Conteúdo da sétima aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos