SUBMÓDULOS DE MÓDULOS LIVRES

Teorema: *Seja R um DIP, E um R-módulo livre, Λ um conjunto (de índices), $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma base (livre) e $F \subseteq E$ um submódulo. Então F é livre, e tem uma base indexada por um subconjunto de Λ.*

Demonstração: Considere que Λ está bem ordenado, e para cada $\lambda \in \Lambda$ a projeção $\pi_\lambda : E \longrightarrow R$. Em outros termos, sendo $x = \sum x_\lambda e_\lambda \in E$ qualquer, com $x_\lambda \in R$ para cada λ, temos $\pi_\lambda(x) = x_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Para todo $\mu \in \Lambda$, considere

$$E_\mu := \bigoplus_{\lambda \leq \mu} Re_\lambda$$

e $F_\mu = F \cap E_\mu$. É fácil ver que $\pi_\mu(F_\mu) \subseteq R$ é um ideal. Como R é DIP, então $\pi_\mu(F_\mu) = (a_\mu)$ para algum $a_\mu \in R$. Como $a_\mu \in \pi_\mu(F_\mu)$, escolha $f_\mu \in F_\mu$ tal que $\pi_\mu(f_\mu) = a_\mu$, para cada $\mu \in \Lambda$. Perceba que ao aplicarmos π_μ sobre os submódulos F_μ, teríamos possivelmente alguns a_μ se anulando. Daí, resgataremos apenas os $\mu \in \Lambda$ para os quais $a_\mu \neq 0$. Considere então $\Lambda_0 = \{\mu \in \Lambda \ ; \ a_\mu \neq 0\}$. Vamos mostrar agora que $\{f_\mu\}_{\mu\in\Lambda_0}$ é uma base (livre) para F.

i) $\{f_\mu\}_{\mu\in\Lambda_0}$ é livre:

Considere uma combinação linear

$$\sum_{\mu\in\Lambda_0} c_\mu f_\mu = 0 \tag{1}$$

onde $c_\mu \in R$ para todo $\mu \in \Lambda_0$. Alguns desses coeficientes c_μ podem ser nulos e, portanto, não interessam por hora. Assim, considere $\Lambda_1 = \{\mu \in \Lambda_0 \ ; \ c_\mu \neq 0\}$. Suponha por contradição que $\Lambda_1 \neq \varnothing$. Como a combinação linear é finita, temos que Λ_1 é um conjunto finito, bem ordenado e não vazio; seja μ_1 o maior elemento de f. Daí, para todo $\mu < \mu_1$ temos $\pi_{\mu_1}(f_\mu) = 0$ (lembre que cada $\pi_\lambda(x)$ calcula o coeficiente de x com respeito ao elemento e_λ da base de E e, portanto, se anula em qualquer outra "direção"). Portanto, aplicando π_{μ_1} na equação (1) temos

$$\pi_{\mu_1}\left(\sum_{\mu\in\Lambda_0} c_\mu f_\mu\right) = \pi_{\mu_1}(0)$$

$$c_{\mu_1} a_{\mu_1} = 0$$

$$c_{\mu_1} = 0 \ \text{ ou } \ a_{\mu_1} = 0$$

que é uma contradição com a construção de Λ_0 e Λ_1 .

ii) $\{f_\mu\}_{\mu\in\Lambda_0}$ gera F:

Observe que $E = \bigcup_{\mu\in\Lambda} E_\mu$. Então $\bigcup_{\mu\in\Lambda} F_\mu = \bigcup_{\mu\in\Lambda} F \cap E_\mu = F \cap \left(\bigcup_{\mu\in\Lambda} E_\mu\right) = F \cap E = F$. Portanto, $F = \bigcup_{\mu\in\Lambda} F_\mu = \bigcup_{\mu\in\Lambda_0} F_\mu$. Dado $\lambda \in \Lambda_0$, considere $\Lambda_\lambda = \{\mu \in \Lambda_0 \ ; \ \mu \leq \lambda\}$. Suponha que λ é o primeiro índice tal que $\{f_\mu\}_{\mu\in\Lambda_\lambda}$ não gera F_λ. Dado $f \in F_\lambda$, digamos $f = \sum_{\mu \leq \lambda} c_\mu e_\mu$ com $c_\mu \in R$. Então $\pi_\lambda(f) = c_\lambda$. Porém, $\pi_\lambda(F_\lambda) = (a_\lambda)$. Então $c_\lambda = b_\lambda a_\lambda$ para algum $b_\lambda \in R$. Considere $g := f - b_\lambda f_\lambda$. Veja que $g \in F_\lambda$ e $\pi_\lambda(g) = \pi_\lambda(f - b_\lambda f_\lambda) = c_\lambda - b_\lambda a_\lambda = 0$. Daí, como $g \in F_\lambda$ e $\pi_\lambda(g) = 0$, então $g \in F_\nu$ para algum $\nu < \lambda$ em Λ_0. Portanto, $g = \sum_{\mu \leq \lambda_\nu} b_\mu f_\mu$ para $b_\mu \in R$. Logo,

$$f = g + b_\lambda f_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda_\nu} b_\mu f_\mu + b_\lambda f_\lambda$$

ou seja, f é gerado por $\{f_\mu\}_{\mu \in \Lambda_\lambda}$, o que é uma contradição. □